Total No. of printed pages = 9

3 (Sem 2) MAT

2015

MATHEMATICS

(General)

Full Marks – 60

Time – 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer either in English or in Assamese.

উত্তৰ ইংৰাজী অথবা অসমীয়াত কৰিবা।

PART – I

(Objective type questions)

1. Answer the following questions : 1×7=7

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Give an example of a non-abelian group.

এটা অক্ৰমবিনিমেয় সংঘৰ উদাহৰণ দিয়া।

(b) Give an example of a ring which is not a field.

এনেকুৱা বলয় এটাৰ উদাহৰণ দিয়া যি এটা ক্ষেত্ৰ নহয়।

[Turn over

(c) Let G be a group and $a \in G$. Show that $(a^{-1})^{-1} = a$

G এটা সংঘ আৰু $a \in G$ হ'লে দেখুওৱা যে $(a^{-1})^{-1} = a$

(d) Write true or false :

"A Boolean ring is commutative."

তলৰ বাক্যটো শুদ্ধ নে ভুল লিখা ঃ

"বুলিয়ান বলয় এটা ক্রমবিনিমেয় হয়।"

(e) Find the rank of the matrix :

তলৰ মেট্রিকটোৰ কোটি উলিওৱা ঃ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

(f) Let A be a square matrix of order n and A^{-1} exists. Then what is the rank of A ?

A যদি n মাত্ৰাৰ বৰ্গীয় মেট্রিক হয় আৰু A^{-1} স্থিত হয়, তেনেহ'লে A ৰ কোটি কি হ'ব?

(g) If $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Where $d_1, d_2 \dots d_n \neq 0$, then find D^{-1}.

যদি $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ আৰু $d_1, d_2 \dots d_n \neq 0$, তেনেহ'লে D^{-1} উলিওৱা।

PART – II

(Very short answer type questions)

2. Answer the following questions : 2×4=8

তলত প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Let $G = \{x \in \mathbb{C} : x^4 = 1\}$. Show that G is an abelian group with respect to the multiplication of complex numbers.

ধৰা $G = \{x \in \mathbb{C} : x^4 = 1\}$। দেখুওৱা যে জটিল সংখ্যাৰ পূৰণ সাপেক্ষে G এটা ক্ৰমবিনিমেয় সংঘ।

(b) "Union of two subgroups is again a subgroup." Establish by an example that the above statement is false.

এটা উদাহৰণৰ সহায়ত তলৰ বাক্যটি ভুল বুলি প্ৰতিপন্ন কৰা ঃ

"দুটা উপসংঘৰ মিলন আকৌ এটা উপসংঘ হ'ব।"

(c) Show that in an integral domain the cancellation laws hold.

দেখুৱা যে এটা পূৰ্ণাংকীয় ৰাষ্ট্ৰত কটাকটি প্ৰক্ৰিয়া খাটে।

(d) If A is a 2×2 matrix and A = adjA, then show that A is of the form $A = \begin{pmatrix} a & o \\ o & a \end{pmatrix}$

যদি A এটা 2×2 মেট্ৰিক্স হয় আৰু A = adjA, তেনেহ'লে প্ৰমাণ কৰা যে $A=\begin{pmatrix} a & o \\ o & a \end{pmatrix}$ আকাৰৰ হ'ব।

PART – III

(Short answer type questions)

3. Answer any *three* questions : 5×3=15

তলৰ যি কোনো তিনিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Show that the order of a subgroup of a finite group G is a divisor of the order of the group.

দেখুৱা যে যদি H এটা সসীম সংঘ G ৰ উপসংঘ হয়, তেনেহ'লে O(H), O(G) ৰ উৎপাদক হ'ব।

(b) Show that the set of all even permutations on S = {1, 2, 3, ... , n} is a subgroup of the permutation group S_n.

দেখুৱা যে S = {1, 2, 3, ..., n} ৰ যুগ্ম বিন্যাসৰ সংহতিটো বিন্যাস সংঘ S_n ৰ উপসংঘ হ'ব।

(c) Let G be a group and a ∈ G. Let f : G→G be given by $f(x) = axa^{-1}$ for every x∈G. Then show that f is an isomorphism.

ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু a ∈ G। ধৰা হল f : G→G ক এনেদৰে দিয়া হৈছে ঃ $f(x) = axa^{-1}$, ∀x∈G দেখুৱা যে f এটা সমাৰূপতা হয়।

(d) Prove that the set $Z[i] = \{a + bi : a, b \in Z\}$ is a ring under the usual addition and multiplication of complex numbers.

প্ৰমাণ কৰা যে জটিল সংখ্যাৰ যোগ আৰু পূৰণফল সাপেক্ষে সংহতি $Z[i] = \{a + bi : a, b \in Z\}$ এটা বলয় গঠন কৰে।

(e) If A and B are two non-singular square matrices of the same order, then show that $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

যদি A আৰু B একে মাত্ৰাৰ বৰ্গীয় মৌলকক্ষ হয় আৰু A^{-1}, B^{-1} স্থিত হয়, তেনেহ'লে দেখুৱা যে $(AB)^{-1}= B^{-1}A^{-1}$.

PART – IV

Answer either (a) and (b) or (c) and (d) from each of the following questions : 10×3=30

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ হয় (a) আৰু (b) নহ'লে (c) আৰু (d)ৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

4. (a) A non-empty subset H of a group G is a subgroup of G if and only if $ab^{-1} \in H$ for every $a, b \in H$. Prove this. 5

প্ৰমাণ কৰা যে সংঘ G ৰ অৰিক্ত উপসংহতি H সংঘটোৰ উপসংঘ হ'ব যদি আৰু যদিহে $ab^{-1} \in H, \forall a, b \in H$

(b) Let $G = \{-1, 1\}$, which is a group under multiplication. Let $f : Z \to G$ be given by

$$f(n)=\begin{cases}1 & \text{if n is even}\\ -1 & \text{if n is odd}\end{cases}$$

Show that f is a onto homomorphism and find ker f. 5

ধৰা $G = \{-1, 1\}$ যি পূৰণ সাপেক্ষে এটা সংঘ। ফলন $f : Z \to G$ ক তলত দিয়া দৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে ঃ

$$f(n)=\begin{cases}1 & \text{যদি n যুগ্ম হয়}\\ -1 & \text{যদি n অযুগ্ম হয়}\end{cases}$$

প্ৰমাণ কৰা যে f এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা, ker f ও নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Let G be a group and $H \leq G$, $a, b \in G$. Then show that 5

(i) $aH = H \Leftrightarrow a \in H$

(ii) $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$

ধৰা G এটা সংঘ আৰু $H \leq G$, $a, b \in G$ প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $aH = H \Leftrightarrow a \in H$

(ii) $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$

(d) If $\mathbb{R}^+$ is the multiplicative group of positive real numbers, then show that $(\mathbb{R}^+, .) \not\cong (\mathbb{R}, +)$ 5

যদি $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ আৰু $\mathbb{R}^+$ পূৰণ সাপেক্ষে এটা সংঘ। দেখুৱা যে $(\mathbb{R}^+, .) \not\cong (\mathbb{R}, +)$

5. (a) Define a ring. If R is a ring such that $x^3 = x$ for every $x \in R$, then show that R is commutative. 5

বলয়ৰ সংজ্ঞা লিখা। R এটা বলয় য'ত $x^3 = x$, $x \in R$, তেনেহ'লে দেখুৱা যে R এটা ক্রমবিনিমেয় বলয় হয়।

(b) Show that an integral domain need not be a field. Also show that a finite integral domain is a field. 5

দেখুৱা যে এটা পূর্ণাংকীয় ৰাষ্ট্র এটা ক্ষেত্র নহ'বও পাৰে। আকৌ দেখুৱা যে সসীম পূর্ণাংকীয় ৰাষ্ট্র এটা ক্ষেত্র হয়।

(c) Let F denote the set of all mappings $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that f is continuous. Define : 5

For $f, g \in F$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,

$$(f.g)(x) = f(x).g(x), \; x \in \mathbb{R}$$

Show that $<F, +, .>$ is a commutative ring with unity.

ধৰা F এটা $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ অবিচ্ছিন্ন ফলনবোৰৰ সংহতি। ইয়াত +,. তলত দিয়া দৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে।

$(f+g)\ (x) = f(x) + g(x)$,

$(f.g)\ (x) = f(x).g(x),\ x \in \mathbb{R},\ f.g \in F$

দেখুৱা যে (F, +,.) এটা একক মৌল বিশিষ্ট ক্রমবিনিমেয় বলয়।

(d) Show that a ring R is without zero divisors if and only if for a, b, c $\in$R, ab = ac, a $\neq$ 0 imply b = c. 5

দেখুৱা যে R বলয় এটা শূন্য ভাজকবিহীন হ'ব যদি আৰু যদিহে $a, b, c \in R$, $ab = ac$, $a \neq 0 \Rightarrow b = c$

6. (a) If A and B are square matrices of order n, then show that adj(AB) = adjB. adjA. 5

যদি A আৰু B উভয়েই n মাত্ৰাৰ বৰ্গাকাৰ মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে দেখুৱা যে adj(AB) = adjB. adjA

(b) Find the rank of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

by reducing it to Echelon form. 5

Echelon আকাৰত প্ৰকাশ কৰি উৰ্পৰোক্ত মৌলকক্ষ Aৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Solve by matrix method : 5

মৌলকক্ষ পদ্ধতিৰ সহায়ত সমাধান কৰা ঃ

$x + y + z = 6$

$x - y + z = 2$

$2x + y - z = 1$

(d) For the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ verify that

$|\text{adj}A| . |A| = |A|^2$ 5

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ মৌলকক্ষৰ বাবে $|\text{adj}A| . |A| = |A|^2$ সত্যাপন কৰা।