2016

MATHEMATICS

(General)

(Coordinate Geometry and Vector Analysis)

(Theory)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

PART—I

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) What is the locus represented by the equation $xy = 0$?

$xy = 0$ সমীকৰণটোৱে কি সঞ্চাৰপথ সূচায় ?

(b) What is the maximum number of normals that can be drawn through a point P to the parabola $y^2 = 4ax$?

যি কোনো এটা বিন্দু P ৰ পৰা অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ লৈ সৰ্বাধিক কিমানডাল অভিলম্ব টানিব পাৰি ?

(c) Find the polar of the point (–2, 3) with respect to the circle

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$$

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$ বৃত্ত সাপেক্ষে (–2, 3) বিন্দুৰ ধ্ৰুৱীয় ৰেখা নিৰ্ণয় কৰা।

(d) When are two circles said to be orthogonal?

দুটা বৃত্তক কেতিয়া লম্বচ্ছেদীয় কোৱা হয়?

(e) If in an ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ two diameters $y = mx$ and $y = m_1 x$ are conjugate diameters, then $mm_1 = ?$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তৰ $y = mx$ আৰু $y = m_1 x$ ব্যাস দুটা সংযুগ্ম ব্যাস হ'লে $mm_1 = ?$

(f) Write the condition of perpendicularity of two lines given by the equations

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ and } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

দুটা সৰলৰেখা $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ আৰু $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ পৰস্পৰ লম্ব হোৱাৰ চৰ্ত লিখা।

(g) Write the equation of the plane passing through the origin with direction cosines of the normal proportional to 1, 0, 0.

মূলবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু অভিলম্বৰ দিশাংক 1, 0, 0 থকা সমতলৰ সমীকৰণটো লিখা।

(h) Write down the value of $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{a}]$.

$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{a}]$ ৰ মান কিমান?

(i) If $\bar{v} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$, then find $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$.

যদি $\bar{v} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$, তেন্তে $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ ৰ মান উলিওৱা।

(j) If $f = x^2y + 2xy + z^2$; verify that curl grad $f = \vec{0}$.

যদি $f = x^2y + 2xy + z^2$, তেতিয়াহ'লে পৰীক্ষা কৰি চোৱা যে কাৰ্ল গ্ৰেড $f = \vec{0}$.

PART—II

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Determine the angle through which the rectangular axes must be turned so that the equation $lx + my + n = 0$ $(m \neq 0)$ may reduce to the form $ay + b = 0$.

$lx + my + n = 0$ $(m \neq 0)$ সমীকৰণটো $ay + b = 0$ আকাৰলৈ ৰূপান্তৰিত হ'বলৈ হ'লে, আয়তীয় অক্ষদ্বয়ক যি কোণত ঘূৰাব লাগিব, সেই কোণটো নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Prove that the sum of the ordinates of the feet of three normals drawn to the parabola $y^2 = 4ax$ from a given point is 0.

প্ৰমাণ কৰা যে, যি কোনো প্ৰদত্ত বিন্দুৰ পৰা উপবৃত্ত $y^2 = 4ax$ লৈ টনা অভিলম্ব তিনিটাৰ পাদবিন্দুৰ y-স্থানাঙ্কৰ যোগফল 0.

(c) If S be the focus of a conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ and PSP' be a focal chord, then prove that

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{2}{l}$$

যদি $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ শাংকৱটোৰ নাভি S আৰু PSP' এটা নাভি-জ্যা হয়, তেনেহ'লে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{2}{l}$$

(d) If $-3l^2 - 6l - 1 + 6m^2 = 0$, find the equation of the circle for which $lx + my + 1 = 0$ is a tangent.

$-3l^2 - 6l - 1 + 6m^2 = 0$ হ'লে $lx + my + 1 = 0$ যাৰ স্পৰ্শক হয়, সেই বৃত্তটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(e) If $\overline{A} = e^{-t}\hat{i} + \log(t^2+1)\hat{j} - \tan t\hat{k}$, find $\dfrac{d^2\overline{A}}{dt^2}$ at $t=0$.

$\overline{A} = e^{-t}\hat{i} + \log(t^2+1)\hat{j} - \tan t\hat{k}$ হ'লে $t=0$ত $\dfrac{d^2\overline{A}}{dt^2}$ ৰ মান উলিওৱা।

PART—III

3. Answer any *four* of the following questions : 5×4=20

তলৰ যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Prove that the equation

$$12x^2+7xy-10y^2+13x+45y-35=0$$

represents two straight lines. Find the angle between them. 5

প্ৰমাণ কৰা যে

$$12x^2+7xy-10y^2+13x+45y-35=0$$

সমীকৰণটোৱে এযোৰ সৰলৰেখা বুজায়। সৰলৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণটো নিৰ্ণয় কৰা।

(b) (i) Prove that the parametric equations

$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \quad \text{and} \quad y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

represent a hyperbola, where t is a parameter. 2

প্ৰমাণ কৰা যে, $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ আৰু $y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ প্ৰাচলিক সমীকৰণ দুটাই এটা পৰাবৃত্ত বুজায়, য'ত t এটা প্ৰাচল।

(ii) Find the equation of the hyperbola whose asymptotes are $2x - y = 3$ and $3x + y = 7$ and which passes through the point (1, 1). 3

(1, 1) বিন্দুৰে যোৱা পৰাবৃত্ত এটাৰ অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাদ্বয় $2x - y = 3$ আৰু $3x + y = 7$ হ'লে পৰাবৃত্তটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(c) If $\phi(x, y, z) = xy^2z$ and $\bar{A} = xy\hat{i} - xy^2\hat{j} + yz^2\hat{k}$, find $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \, \partial z}(\phi \bar{A})$ at the point (2, −1, 1). 5

$\phi(x, y, z) = xy^2z$ আৰু $\bar{A} = xy\hat{i} - xy^2\hat{j} + yz^2\hat{k}$ হ'লে, (2, −1, 1) বিন্দুত $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \, \partial z}(\phi \bar{A})$ ৰ মান উলিওৱা।

(d) In the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, if P and D be the ends of conjugate diameters, find the locus of—

(i) the middle point of PD;

(ii) the intersection of tangents at P and D. 5

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তত P আৰু D সংযুগ্ম ব্যাস দুটাৰ প্ৰান্তবিন্দু হ'লে—

(i) PD ৰ মধ্যবিন্দুৰ সঞ্চাৰপথ নিৰ্ণয় কৰা;

(ii) P আৰু D বিন্দুত স্পৰ্শকদুটাৰ ছেদবিন্দুৰ সঞ্চাৰপথ নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Find the equation of the cylinder whose generating line is parallel to the z-axis and the guiding curve is $x^2+y^2=z$, $x+y+z=1$. 5

এটা চিলিণ্ডাৰৰ উৎপাদক ৰেখাডাল z-অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু নিৰ্দেশক বক্ৰ $x^2+y^2=z$, $x+y+z=1$ হ'লে চিলিণ্ডাৰৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(f) Find the equation of the sphere, which passes through the points (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) and that touches the plane $2x+2y-z=15$. 5

(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) বিন্দু তিনিটাৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $2x+2y-z=15$ সমতলখনক স্পৰ্শ কৰা গোলকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

PART—IV

Answer *either (a) or (b)* of each of the following questions : 10×4=40

তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ পৰা *(a)* অথবা *(b)* ৰ উত্তৰ কৰা :

4. *(a)* *(i)* Prove that, if PCP' and DCD' be a pair of conjugate diameters, of an ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, then

(1) CP^2+CD^2 is a constant, (where C is the origin)

(2) the area of the parallelogram formed by the tangents at the ends of these diameters is constant. 5

যদি PCP' আৰু DCD' এটা উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ৰ দুটা সংযুগ্ম ব্যাস, তেতিয়াহ'লে প্ৰমাণ কৰা যে

(1) CP^2+CD^2 এটা ধ্ৰুৱক (য'ত C মূলবিন্দু);

(2) এই ব্যাসবোৰৰ প্ৰান্তবিন্দুত থকা স্পৰ্শকবোৰে উৎপন্ন কৰা সামন্তৰিকৰ কালি এটা ধ্ৰুৱক।

(ii) Reduce the following equation to the standard form and determine the type of the conic it represents : 5

তলৰ সমীকৰণটোক আদৰ্শ আকাৰত ৰূপান্তৰিত কৰি ই কেনেধৰণৰ শংকু বুজায় তাক নিৰূপণ কৰা :

$$8x^2 - 12xy + 17y^2 + 16x - 12y + 3 = 0$$

(b) (i) Find the shortest distance between the following straight lines and also find the equations of the line of shortest distance. 5

তলৰ ৰেখাযোৰৰ মাজৰ হ্ৰস্বতম দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা আৰু লগতে হ্ৰস্বতম দূৰত্বৰ ৰেখাৰ সমীকৰণবোৰ নিৰ্ণয় কৰা :

$$\frac{x-3}{-3} = \frac{y-8}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

and (আৰু)

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y+7}{-2} = \frac{z-6}{-4}$$

(ii) Prove that the lines

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+10}{8}$$

and $$\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+1}{7}$$

intersect at a point and find the equation of the plane through the lines. Also find the point of intersection. 5

প্ৰমাণ কৰা যে,

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+10}{8}$$

আৰু
$$\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z+1}{7}$$

ৰেখাযোৰে এটা বিন্দুত ছেদ কৰে আৰু ৰেখাডলৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা। লগতে ছেদবিন্দুটোও উলিওৱা।

5. (a) (i) Find the locus of the point of intersection of two normals to a parabola $y^2=4ax$ which are at right angles to one another. 5

$y^2=4ax$ অধিবৃত্তলৈ টনা পৰস্পৰ সমকোণ উৎপন্ন কৰা অভিলম্ব দুটাৰ ছেদবিন্দুৰ সঞ্চাৰপথ উলিওৱা।

(ii) A plane passing through a fixed point (a, b, c) cuts the axes in A, B and C. Show that the locus of the center of the sphere $OABC$ is

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2$$ 5

এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু (a, b, c) ৰে যোৱা সমতল এটাই অক্ষত্ৰয়ক যথাক্ৰমে A, B আৰু C বিন্দুত ছেদ কৰে। দেখুওৱা যে $OABC$ গোলকৰ কেন্দ্ৰৰ সঞ্চাৰপথ

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2$$

(b) (i) Write the condition of parallelism of a pair of straight lines represented by

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

Show that the equation

$$x^2+6xy+9y^2+4x+12y=5$$

represents a pair of parallel straight lines and find the distance between them. 5

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

সমীকৰণটোৱে বুজোৱা সৰলৰেখাযোৰ সমান্তৰাল হোৱাৰ চৰ্তটো লিখা।

দেখুওৱা যে

$$x^2+6xy+9y^2+4x+12y=5$$

সমীকৰণটোৱে বুজোৱা সৰলৰেখাযোৰ সমান্তৰাল। লগতে সৰলৰেখাযোৰৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Find the equation of the cone whose vertex is (1, 2, 3) and the guiding curve is the ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, $z=0$. 5

এটা শংকুৰ সমীকৰণ উলিওৱা, য'ত শংকুৰ শীৰ্ষবিন্দুৰ স্থানাঙ্ক (1, 2, 3) আৰু নিৰ্দেশক বক্ৰটো হ'ল $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, $z=0$ উপবৃত্ত।

6. (a) (i) Find the equations of the circle lying on the sphere $x^2+y^2+z^2=49$ whose centre is at the point $(2, -1, 3)$. 5

$x^2+y^2+z^2=49$ গোলকৰ ওপৰত থকা বৃত্তৰ সমীকৰণ উলিওৱা যাৰ কেন্দ্ৰ $(2, -1, 3)$.

(ii) Find the equation of the tangent to the conic

$$ax^2+2xy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

at the point $P(x_1, y_1)$. 5

$ax^2+2xy+by^2+2gx+2fy+c=0$ শাংকৱৰ $P(x_1, y_1)$ বিন্দুত স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) (i) Find the pole of the line $lx + my + n = 0$ with respect to the circle $x^2 + y^2 = a^2$. 3

$x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত সাপেক্ষে $lx + my + n = 0$ ৰেখাডালৰ ধ্ৰুৱবিন্দু উলিওৱা।

(ii) The polar of the point P with respect to the circle $x^2 + y^2 = a^2$ touches the circle $4x^2 + 4y^2 = a^2$. Show that the locus of P is the circle $x^2 + y^2 = 4a^2$. 4

$x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত সাপেক্ষে এটা বিন্দু P ৰ ধ্ৰুৱীয় ৰেখাডাল $4x^2 + 4y^2 = a^2$ বৃত্তটোক স্পৰ্শ কৰে। দেখুওৱা যে P বিন্দুটোৰ সঞ্চাৰপথ হ'ল $x^2 + y^2 = 4a^2$ বৃত্তটো।

(iii) Show that the circles

$$x^2 + y^2 - 2ax + 2by + ab = 0$$

and $x^2 + y^2 + 2bx + 2ay - ab = 0$

intersect orthogonally. 3

দেখুওৱা যে,

$$x^2 + y^2 - 2ax + 2by + ab = 0$$

আৰু $x^2 + y^2 + 2bx + 2ay - ab = 0$

বৃত্ত দুটা লম্বচ্ছেদীয়।

7. (a) (i) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$(\bar{b} \times \bar{c}) \cdot (\bar{a} \times \bar{d}) + (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot (\bar{b} \times \bar{d}) + (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) = 0$$

5

(ii) Show that (দেখুওৱা যে)

$$(\bar{b} + \bar{c}) \cdot \{(\bar{c} + \bar{a}) \times (\bar{a} + \bar{b})\} = 0$$

if (যদি) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ are coplanar (এক সমতলীয়) 5

(b) (i) If $\bar{r} = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$, find at $t = 0$ the values of

$$\frac{d\bar{r}}{dt}; \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}; \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}; \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| \text{ and } \left|\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|$$

5

যদি $\bar{r} = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$, $t = 0$ ত $\frac{d\bar{r}}{dt}; \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}; \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}; \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|$ আৰু $\left|\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|$ ৰ মান উলিওৱা।

(ii) A particle moves along the curve

$$x = 2t^2,\ y = t^2 - 4t,\ z = 3t - 5$$

where t is the time. Find the components of its velocity and acceleration at time $t = 1$ in the direction $\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$. 5

এটা কণিকাই $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$, $z = 3t - 5$ বক্ৰেৰে গতি কৰে, য'ত t য়ে সময় বুজাইছে। যেতিয়া $t = 1$, কণিকাটিৰ বেগ আৰু ত্বৰণৰ উপাংশ $\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ৰ দিশত নিৰূপণ কৰা।

★★★