2017

MATHEMATICS

(General)

Paper : 6.1

(Linear Algebra and Complex Analysis)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

1. Mention if the statements given below are True or False : 1×10=10

তলত দিয়া উক্তিবোৰ শুদ্ধনে অশুদ্ধ নিৰ্ণয় কৰা :

(a) If $V(F)$ be a vector space and 0 be the zero vector of V, then $a0 \neq 0$, $\forall\, a \in F$.

যদি $V(F)$ এটা সদিশ ক্ষেত্ৰ আৰু 0 ইয়াৰ শূন্য ভেক্টৰ, তেন্তে $a0 \neq 0$, $\forall\, a \in F$.

(b) If W_1 and W_2 are subspaces of the vector space $V(F)$, then $W_1 + W_2$ is also a subspace of $V(F)$.

যদি W_1 আৰু W_2 সদিশ ক্ষেত্ৰ $V(F)$ৰ উপস্থান তেন্তে, $W_1 + W_2$ ও সদিশ ক্ষেত্ৰ $V(F)$ৰ উপস্থান।

(c) A system consisting of a single non-zero vector is always linearly independent.

কেৱল এটা অশূন্য ভেক্টৰ থকা যি কোনো এটা সংহতি সদায় ৰৈখিক স্বতন্ত্ৰ।

(d) There does not exist a basis for each finite dimensional vector space.

প্ৰত্যেক সসীম মাত্ৰাৰ সদিশ স্থানৰ একোটা আধাৰ না থাকে।

(e) Each set of $(n+1)$ or more vectors of a finite dimensional vector space $V(F)$ of dimension n is linearly dependent.

n মাত্ৰাৰ সদিশ স্থান $V(F)$ৰ $(n+1)$ বা ততোধিক মৌল থকা যি কোনো সংহতি ৰৈখিক পৰতন্ত্ৰ।

(f) Elementary transformations change the rank of a matrix.

প্ৰাথমিক ৰূপান্তৰে কোনো মৌলকক্ষৰ কোটি সলনি কৰে।

(g) Two matrices will be equivalent if they are of same size and of same rank.

দুটা মৌলকক্ষ সামঞ্জস্য হ'ব যদিহে সিহঁতৰ আকৃতি আৰু কোটি একে হয়।

(h) If X is an eigenvector of a matrix A, then X corresponds to more than one eigenvalues of A.

যদি X কোনো মৌলকক্ষ Aৰ আইগেন ভেক্টৰ, তেন্তে X সাপেক্ষে Aৰ এটাতকৈ বেছি আইগেন মান থাকে।

(i) A single-valued function is said to be analytic if it is defined and differentiable at each point of its domain.

একক মানবিশিষ্ট এটা ফলনক বৈশ্লেষিক বুলি কোৱা হয় যদিহে ফলনটো ইয়াৰ আদিক্ষেত্ৰৰ প্ৰত্যেক বিন্দুত সংজ্ঞাবদ্ধ আৰু অৱকলনীয় হয়।

(j) The modulus of the sum of two complex numbers can exceed the sum of their moduli.

দুটা জটিল সংখ্যাৰ যোগফলৰ মাপাংকই সংখ্যা দুটাৰ মাপাংকৰ যোগফলক অতিক্ৰম কৰিব পাৰে।

2. (a) Answer any *two* of the following questions : 2×2=4

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ লিখা :

(i) Let $V(F)$ be a vector space over a field F. Then prove that

$$a(-\alpha) = -(a\alpha), \quad \forall\, a \in F, \quad \forall \alpha \in V$$

ধৰা হ'ল, $V(F)$ ক্ষেত্ৰ Fৰ ওপৰত এটা সদিশ স্থান। প্ৰমাণ কৰা যে

$$a(-\alpha) = -(a\alpha), \quad \forall\, a \in F, \quad \forall \alpha \in V$$

(ii) Prove that the set

$$W = \{(a_1, a_2, 0) \mid a_1 \in F, a_2 \in F\}$$

is a subspace of $V_3(F)$.

প্ৰমাণ কৰা যে সংহতি

$$W = \{(a_1, a_2, 0) \mid a_1 \in F, a_2 \in F\}$$

বৈখিক স্থান $V_3(F)$ৰ এটা উপস্থান।

(iii) Prove that every superset of a linearly dependent set of vectors is linearly dependent.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা বৈখিক পৰতন্ত্ৰ সংহতিৰ সকলো অধিসংহতিয়েই বৈখিক পৰতন্ত্ৰ।

(b) Answer any *three* of the following questions : 2×3=6

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ যি কোনো তিনিটাৰ উত্তৰ লিখা :

(i) If $z_1, z_2 \in C$, then prove that

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

যদি $z_1, z_2 \in C$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

(ii) Show that the function $u = x^3 - 3xy^2$ is harmonic and find the corresponding analytic function.

দেখুওৱা যে $u = x^3 - 3xy^2$ এটা হৰাত্মক ফলন আৰু লগতে অনুৰূপ বৈশ্লেষিক ফলনটো নিৰ্ণয় কৰা।

(iii) If $f(z) = z^3 - 2z$, $z \in C$, then find $f'(z)$ at $z = -1$ provided the value exists.

যদি $f(z) = z^3 - 2z$, $z \in C$, তেন্তে $z = -1$ত $f'(z)$ নির্ণয় কৰা যদিহে এই মান স্থিত হয়।

(iv) Using the definition of complex line integral, evaluate $\int_L dz$.

জটিল ৰেখা সমাকলনৰ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি $\int_L dz$ৰ মান উলিওৱা।

(v) Calculate $\int_C \bar{z}\, dz$ from $z = 0$ to $z = 4 + 2i$ along the curve C given by $z = t^2 + it$.

$z = t^2 + it$ য়ে নিৰ্দেশ কৰা এটা বক্ৰ Cৰে $z = 0$ৰ পৰা $z = 4 + 2i$ লৈ $\int_C \bar{z}\, dz$ৰ মান উলিওৱা।

3. *(a)* Answer any *two* of the following questions : 5×2=10

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ লিখা:

(i) Prove that the union of two subspaces is a subspace if and only if one is contained in the other.

প্ৰমাণ কৰা যে দুটা উপস্থানৰ মিলন আন এটা উপস্থান হ'ব যদি আৰু যদিহে এটা উপস্থান আনটোৰ অন্তৰ্ভুক্ত হয়।

(ii) If W_1 and W_2 are subspaces of a vector space $V(F)$, then prove that

$$L(W_1 \cup W_2) = W_1 + W_2$$

যদি W_1 আৰু W_2 এটা বৈখিক স্থান $V(F)$ৰ দুটা উপস্থান হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$L(W_1 \cup W_2) = W_1 + W_2$$

(iii) Let α, β, γ are linearly independent vectors of a vector space $V(F)$. Prove that $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$ are also linearly independent.

ধৰা α, β, γ বৈখিক স্থান $V(F)$ৰ তিনিটা বৈখিক স্বতন্ত্ৰ ভেক্টৰ। প্ৰমাণ কৰা যে $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$ ও বৈখিক স্বতন্ত্ৰ।

(b) Answer any *two* of the following questions : 5×2=10

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ লিখা :

(i) If $f(z)$ is analytic with its derivative $f'(z)$ continuous at all points inside and on a simple closed curve C, prove that $\int_C f(z)\,dz = 0$.

যদি $f(z)$ ফলনটো বৈশ্লেষিক আৰু ইয়াৰ অৱকলজ $f'(z)$ সৰলভাৱে আবদ্ধ এটা বক্ৰ C ৰ অন্তৰ্ভাগকে ধৰি ইয়াৰ ওপৰৰ সকলো বিন্দুতে অবিছিন্ন, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, $\int_C f(z)\,dz = 0$.

(ii) Show that an analytic function with constant modulus is constant.

দেখুওৱা যে এটা বৈশ্লেষিক ফলন ধ্ৰুৱক হ'ব যদিহে ইয়াৰ মাপাংক ধ্ৰুৱক হয়।

(iii) Prove that

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

where C is any simple closed curve containing the point $z=a$ in the region bounded by C.

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

য'ত C এটা সৰলভাৱে আবদ্ধ বক্ৰ আৰু $z=a$, C ৰ দ্বাৰা আবদ্ধ ক্ষেত্ৰৰ এটা যি কোনো বিন্দু।

4. Prove that the linear span $L(S)$ of any subset S of a vector space $V(F)$ is a subspace of V generated by S, i.e., $L(S) = \{S\}$. 10

প্ৰমাণ কৰা যে বৈখিক স্থান $V(F)$ৰ কোনো উপসংহতি Sৰ বৈখিক বিস্তাৰ $L(S)$ বৈখিক স্থান $V(F)$ৰ উপস্থান হ'ব যাৰ জনক S অৰ্থাৎ $L(S) = \{S\}$.

Or / অথবা

Let $T: U(F) \to V(F)$ be a linear transformation from a vector space $U(F)$ into a vector space $V(F)$. Then show that *(i)* $T(0) = 0$, where 0 denotes the corresponding zero vector and *(ii)* $T(-\alpha) = -T(\alpha)$, $\forall\, \alpha \in U(F)$.

ধৰা হ'ল, $T: U(F) \to V(F)$ বৈখিক স্থান $U(F)$ৰ পৰা $V(F)$লৈ এটা বৈখিক ৰূপান্তৰ। দেখুওৱা যে, *(i)* $T(0) = 0$, য'ত 0য়ে যথাযোগ্য প্ৰসংগ সাপেক্ষে বৈখিক স্থানৰ শূন্যক নিৰ্দেশ কৰে আৰু *(ii)* $T(-\alpha) = -T(\alpha)$, $\forall\, \alpha \in U(F)$.

5. State the different elementary transformations of a matrix. Reduce the following matrix to normal form by elementary transformations and hence find its rank. 3+6+1=10

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

মৌলকক্ষৰ প্ৰাথমিক ৰূপান্তৰসমূহ লিখা। প্ৰাথমিক ৰূপান্তৰৰ সহায়ত তলৰ মৌলকক্ষটো প্ৰসামান্য আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰি ইয়াৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

Or / অথবা

When is a matrix said to be in echelon form? Reduce the following matrix to echelon form and hence find its rank. 3+6+1=10

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

এটা মৌলকক্ষ কেতিয়া ইকেল'ন আৰ্হিত থকা বুলি কোৱা হয়? তলৰ মৌলকক্ষটো ইকেল'ন আৰ্হিলৈ নি ইয়াৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা।

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Define eigenvalue and eigenvector of an $n \times n$ matrix A over the field of real numbers. Also find the eigenvalues and eigenvectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2+8=10

বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত বিবেচনা কৰা এটা $n \times n$ মৌলকক্ষ Aৰ আইগেন মান আৰু আইগেন ভেক্টৰৰ সংজ্ঞা দিয়া। লগতে

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

মৌলকক্ষটোৰ আইগেন মান আৰু আইগেন ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা।

Or / অথবা

State and prove the Cayley-Hamilton theorem. 10

কেইলে-হেমিল্টনৰ উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰি প্ৰমাণ কৰা।

7. Prove that the necessary and sufficient condition for a complex function

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

to be analytic in a region R are

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ and } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

where all partial derivatives are assumed continuous on R. 10

এটা জটিল ফলন

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

জটিল সমতলৰ R ক্ষেত্ৰত বৈশ্লেষিক হোৱাৰ চৰ্তসমূহ হ'ল

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ আৰু } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

প্ৰমাণ কৰা যে, এই চৰ্তসমূহ প্ৰয়োজনীয় আৰু পৰ্যাপ্ত য'ত আংশিক অৱকলজসমূহক Rত অবিচ্ছিন্ন বুলি ধৰা হৈছে।

Or / অথবা

Define a harmonic function. Show that a harmonic function u satisfies the differential equation $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$ 2+8=10

হৰাত্মক ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱা যে এটা হৰাত্মক ফলন uয়ে $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ অৱকলনীয় সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে।

★★★